

Radioaktivität

Unter dem Begriff Radioaktivität fasst man die spontan verlaufenden Kernprozesse zusammen, die ausschliesslich nach statistischen Gesetzen ablaufen. Radioaktive Kerne können sich auf mannigfaltige Arten in andere Kerne umwandeln, wobei Energie frei wird. Die betrachteten Kernprozesse lassen sich im Allgemeinen nicht durch äussere Gegebenheiten wie Druck, Temperatur und chemische Umgebung beeinflussen. Für einen einzelnen Kern kann man nicht vorhersagen, wann er welche Reaktion eingeht. Man kann aber die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls angeben. Erst wenn man sehr viele Kerne betrachtet, kann man statistische Mittelwerte, etwa die Zerfallsrate, sinnvoll verwenden.

Zerfallsgesetze

Wegen der Unbeeinflussbarkeit der Kernprozesse folgen radioaktive Zerfälle einer Kinetik erster Ordnung. Betrachtet wird die Umwandlung eines Kerns A (Mutter) in einen stabilen Kern B (Tochter) unter Aussendung irgendeiner Art von Strahlung x.



Die Zerfallsrate $-\frac{dn}{dt}$ ist proportional zur Anzahl n der betrachteten Kerne. Das negative Vorzeichen berücksichtigt, dass die Teilchenzahl mit zunehmender Zeit abnimmt.

$$-\frac{dn}{dt} = \lambda \cdot n(t)$$

Der Proportionalitätsfaktor λ , die Zerfallskonstante, ist nur vom Nuklid abhängig. Die Differentialgleichung lässt sich durch Separieren der Variablen leicht lösen.

$$\frac{1}{n} \cdot dn = -\lambda \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{n} \cdot dn = -\lambda \cdot \int dt$$

$$\ln n(t) = -\lambda \cdot t + K$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten K wird die Situation zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 betrachtet.

$$\ln n(t_0) = -\lambda \cdot t_0 + K$$

$$K = \ln n(t_0) + \lambda \cdot t_0$$

Damit erhält man

$$\ln n(t) = -\lambda \cdot t + \ln n(t_0) + \lambda \cdot t_0 = \ln n(t_0) - \lambda \cdot (t - t_0)$$

Die Zeitabhängigkeit der Anzahl Kerne ist damit

$$n(t) = n(t_0) \cdot \exp [-\lambda (t - t_0)]$$

Die Zerfallskonstante λ hat die Dimension einer reziproken Zeit. Oft wird an ihrer Stelle die Halbwertszeit $t_{1/2}$ verwendet, die angibt, nach welcher Zeit die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Kerne zerfallen sind.

$$\frac{1}{2} n(t_0) = n(t_0) \cdot \exp [-\lambda ((t_0 + t_{1/2}) - t_0)]$$

Wie man sieht, ist die Halbwertszeit unabhängig von der Anzahl Kerne.

$$\frac{1}{2} = \exp [-\lambda (t_0 + t_{1/2} - t_0)]$$

Ebenso ist sie unabhängig von der Wahl der Anfangszeit.

$$\frac{1}{2} = \exp [-\lambda t_{1/2}]$$

$$\ln \frac{1}{2} = -\lambda t_{1/2}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Als weiteres Mass für die Zerfallsfreudigkeit eines Nuklids kann die mittlere Lebensdauer τ verwendet werden. Es ist dies die Zeit, nach der die Anzahl Kerne auf den e-ten Teil zurückgegangen ist. Es ist

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Aktivität

Die Zerfallsrate ist in der Radiochemie von zentraler Bedeutung. Sie heisst auch Aktivität. Ihre Einheit ist die einer reziproken Zeit. Im internationalen Einheitensystem ist das eine reziproke Sekunde. Diese Einheit hat den Namen Becquerel (Bq).

$$\text{Bq} = \text{s}^{-1}$$

Ein Synonym dafür heisst dps (decays per second). Ebenfalls verwendet werden die Einheiten dpm (decays per minute) und dph (decays per hour). Es gibt für die Aktivität auch noch eine historische Einheit, das Curie (Ci), das heute nicht mehr verwendet werden sollte. Es gilt

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

Der Radiochemiker interessiert sich für die Aktivität als physikalische Grösse viel mehr als für die Masse der aktiven Substanz, die für die Aktivität verantwortlich ist. Die Aktivität wird daher als Mengenangabe der Masse vorgezogen. Man kauft zum Beispiel nicht 7 mg $\text{NaH}^{14}\text{CO}_3$, sondern 200 MBq. Die Umrechnung zwischen Masse m und Aktivität A geschieht nach der Formel

$$A = -\frac{dn}{dt} = \lambda n = \frac{\lambda m N_A}{m_M}$$

mit der Avogadro-Konstanten N_A und der Molmasse m_M . Dies ist eine der wichtigsten Gleichungen in der Radiochemie.

Impulsrate

Radioaktive Strahlung ist mit unseren menschlichen Sinnen nicht spürbar. Man ist auf Messgeräte angewiesen. Nicht jeder zerfallende Kern wird aber seine Spuren in einem Detektor hinterlassen. Nur ein bestimmter Anteil der Einzelereignisse wird vom Detektor bemerkt. Was ein Messgerät direkt feststellt, ist die Anzahl Ereignisse im Detektor pro Zeit, die Impulsrate. Man verwechsle sie nicht mit der Aktivität. Es ist Sache der Kalibration des Messgeräts, auf die unbemerkten Ereignisse zurückzuschliessen. Man definiert die Impulsrate I als

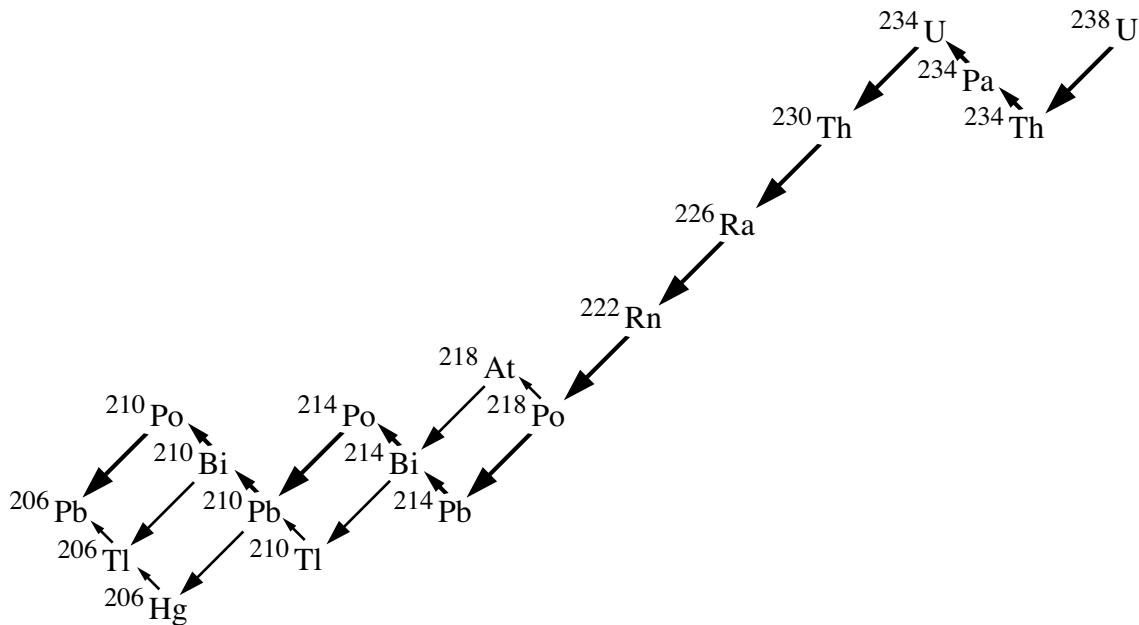
$$I = \varepsilon \cdot A$$

mit der Zählhausbeute ε , die man auch als Wirkungsgrad bezeichnet. Die Impulsrate kann vom Nuklid abhängig sein. Man misst die Impulsrate in der gleichen Einheit, wie die Aktivität. Man nennt sie cps (counts per second).

Aktivität mehrerer Nuklide

Liegen in einer Probe mehrere strahlende Nuklide vor, ergibt sich die Gesamtaktivität als Summe der Einzelaktivitäten. Das folgt unmittelbar aus der Unabhängigkeit der Zerfallsprozesse. Bestrahlt man eine Probe im Reaktor mit Neutronen, werden im Allgemeinen viele verschiedene Radionuklide gebildet. Jedes zerfällt unabhängig von den anderen entsprechend seiner Halbwertszeit. Die mathematische Behandlung der Situation ist trivial.

Anders sieht es aus, wenn Tochternuklide radioaktiv sind und nun ihrerseits in Enkelnuklide zerfallen. Trotz der Unabhängigkeit der Einzelereignisse schleicht sich so eine Abhängigkeit zwischen den Einzelaktivitäten ein. Dieser Fall ist sehr häufig. So zerfallen die schwersten in der Natur vorkommenden radioaktiven Nuklide in langen Zerfallsreihen, bis ein stabiler Kern erreicht ist. So endet etwa die Zerfallsreihe des Nuklids ^{238}U beim ^{206}Pb .



Betrachtet wird zunächst der einfachste Fall eines zweistufigen Zerfalls zu einem stabilen Enkelnuklid C:



Für die Einzelaktivität des ersten Schrittes ändert sich nichts.

$$-\frac{dn_A}{dt} = \lambda_A \cdot n_A(t)$$

Nuklid B zerfällt nicht nur in Nuklid C, es wird auch aus A neu gebildet. Aus jedem A entsteht ein B. Daher ist

$$-\frac{dn_B}{dt} = \lambda_B \cdot n_B(t) + \frac{dn_A}{dt}$$

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, erhält man

$$-\frac{dn_B}{dt} = \lambda_B \cdot n_B(t) - \lambda_A \cdot n_A(t)$$

Die Lösung für den ersten Schritt ist bereits bekannt. Für die Einzelaktivität ergibt sich wiederum

$$n_A(t) = n_A(t_0) \cdot \exp [- \lambda_A (t - t_0)]$$

Setzt man in die vorherige Gleichung ein, ergibt sich

$$-\frac{dn_B}{dt} = \lambda_B \cdot n_B(t) - \lambda_A \cdot n_A(t_0) \cdot \exp [- \lambda_A (t - t_0)]$$

Bringt man diese Differentialgleichung 1. Ordnung in die Standardschreibweise, erhält man

$$\frac{dn_B}{dt} + \lambda_B \cdot n_B(t) - \lambda_A \cdot n_A(t_0) \cdot \exp [- \lambda_A (t - t_0)] = 0$$

Zur Erinnerung: Die Differentialgleichung

$$\frac{dy(x)}{dx} + P(x) \cdot y(x) + Q(x) = 0$$

mit beliebigen Funktionen P und Q hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = - \exp\left(-\int P(x) dx\right) \cdot \left[\int Q(x) \exp\left(\int P(x) dx\right) dx + K \right]$$

wobei für die Integrale irgendeine Stammfunktion eingesetzt werden kann, also keine weitere Integrationskonstante eingeführt werden muss. Angewandt auf obiges Problem ergibt sich

$$x = t$$

$$y = n_B$$

$$P = \lambda_B$$

$$Q = -\lambda_A \cdot n_A(t_0) \cdot \exp(-\lambda_A(t-t_0))$$

$$\int P(x) dx = \int \lambda_B dt = \lambda_B t$$

$$n_B(t) = -\exp(-\lambda_B t) \cdot \left[\int -\lambda_A \cdot n_A(t_0) \cdot \exp(-\lambda_A(t-t_0)) \cdot \exp(\lambda_B t) dt + K \right]$$

$$n_B(t) = \exp(-\lambda_B t) \cdot \lambda_A \cdot n_A(t_0) \cdot \left[\int \exp(-\lambda_A(t-t_0) + \lambda_B t) dt + K' \right]$$

$$n_B(t) = \exp(-\lambda_B t) \cdot \lambda_A \cdot n_A(t_0) \cdot \left[\int \exp((\lambda_B - \lambda_A)t + \lambda_A t_0) dt + K' \right]$$

$$n_B(t) = \exp(-\lambda_B t) \cdot \lambda_A \cdot n_A(t_0) \cdot \exp(\lambda_A t_0) \cdot \left[\int \exp((\lambda_B - \lambda_A)t) dt + K'' \right]$$

$$n_B(t) = \exp(-\lambda_B t) \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} n_A(t_0) \cdot \exp(\lambda_A t_0) \cdot \left[\exp(\lambda_B - \lambda_A)t + K''' \right]$$

Setzt man für die Zeit t den Wert t_0 ein, ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für die Integrationskonstante K''' . Die endgültige Funktion hat die Form

$$n_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} n_A(t_0) \cdot \left[\exp(-\lambda_A(t-t_0)) - \exp(-\lambda_B(t-t_0)) \right] + n_B(t_0) \cdot \exp(-\lambda_B(t-t_0))$$

Es handelt sich also um eine recht komplizierte und unanschauliche Funktion. Es ist daher sinnvoll, einige Spezialfälle etwas genauer zu betrachten.

Häufig startet man von reinem Mutternuklid A. Es gilt also $n_B(t_0) = 0$. Dadurch fällt der letzte Summand in der obigen Formel weg.

$$n_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} n_A(t_0) \cdot \left[\exp(-\lambda_A(t-t_0)) - \exp(-\lambda_B(t-t_0)) \right]$$

Hier wird nur dieser Fall betrachtet. Messbar ist nicht die Stoffmenge $n_B(t)$ des Nuklids B, sondern die Aktivität $A_B(t)$. Man setzt also

$$A_B(t) = \lambda_B n_B(t) \quad A_A(t_0) = \lambda_A n_A(t_0)$$

Damit erhält man die Form

$$A_B(t) = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} A_A(t_0) \cdot \left[\exp(-\lambda_A(t-t_0)) - \exp(-\lambda_B(t-t_0)) \right]$$

Berücksichtigt man noch die Beziehung

$$A_A(t) = A_A(t_0) \cdot \exp(-\lambda_A(t-t_0))$$

erhält man eine besonders brauchbare Darstellung.

$$A_B(t) = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} A_A(t) \cdot [1 - \exp(-(\lambda_B - \lambda_A)(t - t_0))]$$

Transientes Gleichgewicht

Es gibt Fälle, in denen sich ein radioaktives Gleichgewicht einstellt. Voraussetzung ist die Bedingung $\lambda_A < \lambda_B$, oder gleichbedeutend $t_{1/2}(A) > t_{1/2}(B)$. Das Gleichgewicht ist erreicht, wenn in obiger Formel der Term $\exp(-(\lambda_B - \lambda_A)(t - t_0))$ annähernd verschwunden ist. In der Praxis wartet man mindestens 10 Halbwertszeiten des Tochter-nuklids ab. Falls die Halbwertszeiten vergleichbar gross sind, wartet man mindestens

$$t = 10 \frac{t_{1/2}(A) t_{1/2}(B)}{t_{1/2}(A) - t_{1/2}(B)}$$

Dann gilt

$$A_B(t) \approx \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} A_A(t) \qquad \frac{A_B(t)}{A_A(t)} \approx \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}$$

Wie man sieht, ist die Aktivität der Tochter im Gleichgewicht grösser als jene der Mutter. Das erscheint auf den ersten Blick widersinnig. Es können offensichtlich nicht mehr Töchter zerfallen, als gebildet werden. Dennoch ist das Ergebnis richtig. Die Töchter wurden nämlich geboren, als noch mehr Mütter als gegenwärtig vorhanden waren.

Säkulares Gleichgewicht

Betrachtet man den Fall $\lambda_A \ll \lambda_B$, oder gleichbedeutend $t_{1/2}(A) \gg t_{1/2}(B)$, dann kann man in der ursprünglichen Funktion λ_A gegenüber λ_B vernachlässigen.

$$A_B(t) = A_A(t) \cdot [1 - \exp(-\lambda_B(t - t_0))]$$

Dieser Fall liegt bei den natürlichen Zerfallsreihen vor. Entsprechend gilt

$$\frac{A_B(t)}{A_A(t)} \approx 1 - \exp(-\lambda_B(t - t_0))$$

Auch hier wartet man etwa 10 Halbwertszeiten des Tochternuklids ab, dann ist das Gleichgewicht eingestellt. Die Aktivitäten von Mutter und Tochter sind dann gleich. Daraus folgt

$$A_B(t) \approx A_A(t)$$

$$\lambda_B \cdot n_B(t) \approx \lambda_A \cdot n_A(t)$$

$$\frac{n_B(t)}{n_A(t)} \approx \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{t_{1/2}(B)}{t_{1/2}(A)}$$

Mehrere sequenzielle Zerfälle

Es ist für die natürlichen Zerfallsreihen typisch, dass viele Töchter in Sequenz gebildet werden, bis schliesslich ein stabiles Nuklid erreicht wird.



Die Einzelaktivität des ersten Schrittes ist unabhängig von allen anderen.

$$\frac{dn_A}{dt} = -\lambda_A \cdot n_A(t)$$

Die anderen aktiven Nuklide zerfallen einerseits und werden andererseits stetig neu gebildet.

$$\frac{dn_B}{dt} = \lambda_A \cdot n_A(t) - \lambda_B \cdot n_B(t)$$

$$\frac{dn_C}{dt} = \lambda_B \cdot n_B(t) - \lambda_C \cdot n_C(t)$$

$$\dots$$

$$\frac{dn_Y}{dt} = \lambda_X \cdot n_X(t) - \lambda_Y \cdot n_Y(t)$$

Hier wird nur der Spezialfall $0 = n_B(t_0) = n_C(t_0) = \dots = n_Y(t_0)$ betrachtet. Das Differentialgleichungssystem ist geschlossen lösbar. Man erhält

$$n_Y(t_0) = C_A \exp(-\lambda_A(t-t_0)) + C_B \exp(-\lambda_B(t-t_0)) + \dots + C_Y \exp(-\lambda_Y(t-t_0))$$

mit den zeitunabhängigen Koeffizienten

$$C_A = n_A(t_0) \cdot \frac{\lambda_A \cdot \lambda_A \cdot \dots \cdot \lambda_X}{(\lambda_B - \lambda_A) \cdot (\lambda_C - \lambda_A) \cdot \dots \cdot (\lambda_Y - \lambda_A)}$$

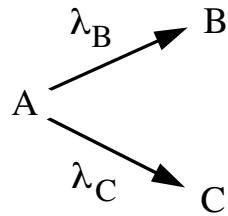
$$C_B = n_A(t_0) \cdot \frac{\lambda_A \cdot \lambda_A \cdot \dots \cdot \lambda_X}{(\lambda_A - \lambda_B) \cdot (\lambda_C - \lambda_B) \cdot \dots \cdot (\lambda_Y - \lambda_B)}$$

...

$$C_Y = n_A(t_0) \cdot \frac{\lambda_A \cdot \lambda_A \cdot \dots \cdot \lambda_X}{(\lambda_A - \lambda_Y) \cdot (\lambda_C - \lambda_Y) \cdot \dots \cdot (\lambda_X - \lambda_Y)}$$

Dualer Zerfall

Ein Nuklid hat oft mehrere Möglichkeiten, in ein Tochternuklid zu zerfallen.



Unter der Annahme, dass die Nuklide B und C stabil sind, gilt

$$\begin{aligned} -\frac{dn_A}{dt} &= (\lambda_B + \lambda_C) \cdot n_A(t) \\ \frac{dn_B}{dt} &= \lambda_B \cdot n_A(t) \\ \frac{dn_C}{dt} &= \lambda_C \cdot n_A(t) \end{aligned}$$

Dieser Fall ist mathematisch nicht komplizierter als der einfache Zerfall. Die Halbwertszeit für den Zerfall von A setzt sich aus zwei Anteilen zusammen.

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \lambda_B + \lambda_C \\ \frac{1}{t_{1/2}(A)} &= \frac{1}{t_{1/2}(B)} + \frac{1}{t_{1/2}(C)} \end{aligned}$$