

Erste bekannte Anwendung des Prinzips der kleinsten Quadrate

Hintergrund

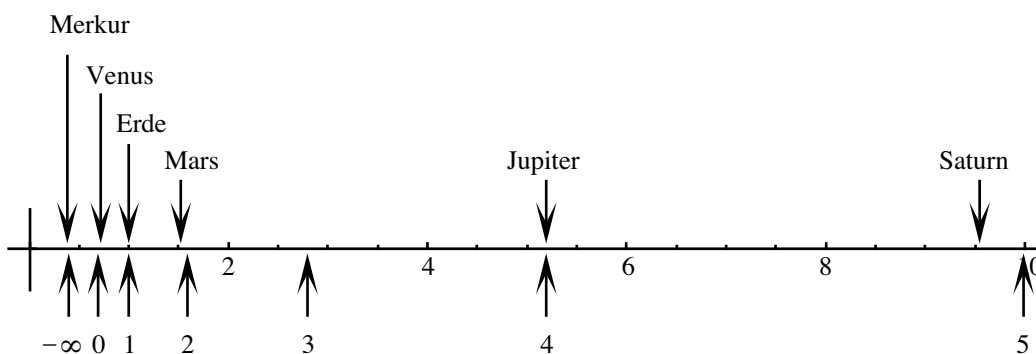
In der Mitte des 18. Jahrhunderts waren 6 Planeten bekannt: Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn. Die Grösse der Ellipsenbahnen scheinen einer gewissen Regelmässigkeit zu folgen. Das war schon Johannes Kepler aufgefallen. Als Erster fasste Johann Daniel Titius (1729-1796) im Jahr 1766 in seiner Übersetzung von Charles Bonnets "Contemplation de la Nature" die Regelmässigkeit in Zahlen:

Teilt man die Distanz (genauer die grosse Halbachse) der Saturn-Bahn in 100 Teile, dann kreist Merkur in 4 Teilen Abstand um die Sonne, Venus in $4 + 1 \times 3$ Teilen, die Erde in $4 + 2 \times 3$ Teilen, Mars in $4 + 3 \times 3$ Teilen. Nun erscheint eine Lücke bei $4 + 4 \times 3$ Teilen, in der noch nie ein Planet beobachtet wurde. Aber im Abstand von $4 + 5 \times 3$ Teilen findet man Jupiter und in $4 + 6 \times 3$ Teilen Saturn. Das kann doch kein Zufall sein.

Johann Elert Bode (1747-1826) hat diese Idee aufgegriffen und allgemein bekanntgemacht. Was man heute allgemein als Titius-Bode-Regel kennt, hat Johann Friedrich Wurm (1769-1833) im Jahr 1787 folgendermassen formuliert:

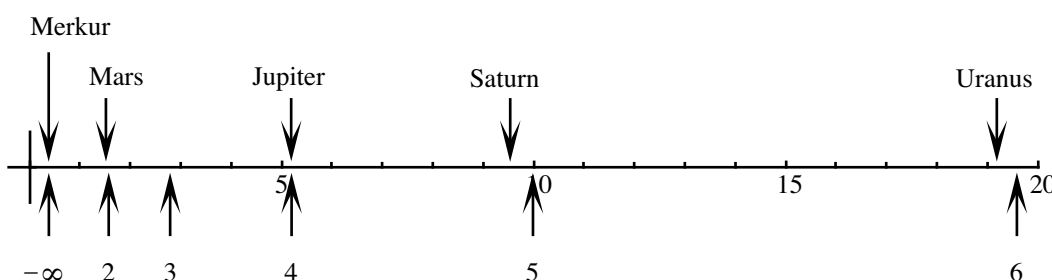
$$a = 0.4 + 0.3 \times 2^n \text{ mit } n = -\infty, 0, 1, 2, \dots$$

Dabei wird die grosse Halbachse a der Planetenbahnen in Astronomischen Einheiten (grosse Halbachse der Erdbahn) gemessen.



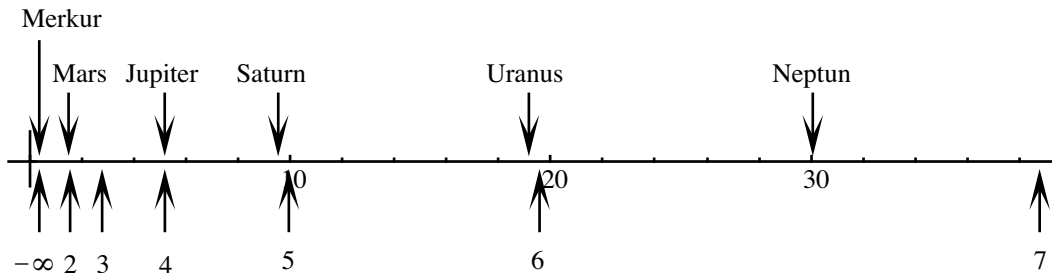
Bei $n=3$ besteht eine Lücke. Bode war immer überzeugt, dass dort ein Planet kreisen müsse, der noch nicht entdeckt ist. Die Meinung unter den Astronomen war geteilt.

Im Jahr 1781 entdeckte Wilhelm Herschel (1738-1822) zufällig den Planeten Uranus. Schnell wurde klar, dass der Neuling mit $n=6$ perfekt in die Reihe passte.



Das überzeugte einige zusätzliche Astronomen, die Titius-Bode-Regel so ernst zu nehmen, dass sie begannen, aktiv nach dem fehlenden Planeten in der Lücke zu suchen.

Heute wird die Titius-Bode-Regel nicht mehr ernst genommen. Der 1846 entdeckte Planet Neptun passt überhaupt nicht in die Reihe.



Unser Sonnensystem ist seit über 3 Mia Jahren stabil und dürfte es auch nochmals so lange bleiben. Da können die Planetenbahnen nicht jeden beliebigen Wert annehmen. Die Abstände der Planeten um andere Sterne als die Sonne zeigen zum Teil ähnliche geometrische Reihen.

Franz Xaver von Zach (1754-1832), ein bekannter ungarischer Astronom und Leiter der Sternwarte von Gotha in Sachsen war im Jahr 1800 zusammen mit dem Amateurastronomen Johann Hieronymus Schroeter (1745-1816) maßgeblich an der Gründung der "Himmels-Polizey" beteiligt. Jedem der 24 Mitglieder wurde per Los ein Abschnitt von 15° der Ekliptik zugeteilt, in der er nach dem Planeten suchen sollte. Die Himmels-Polizey, so stelle sich heraus, sollte auch wirklich erfolgreich sein.

kopische Sterne zu durchspähen. Sechs damals in Lilienthal versammelte Astronomen stifteten daher den 21 Septbr. 1800 zur systematischen Auffuchung dieses zwischen Mars und Jupiter vermutheten Planeten eine geschlossene Gesellschaft von 24 practischen, in ganz Europa verbreiteten Astronomen. Sie wählten den Ober-Amtman Schröter zu ihrem Präsidenten, und mir wurde die Ehre und das Vertrauen zu Theil, zum beständigen Secretair dieser astronomischen Gesellschaft ernannt zu werden. Der Plan der Societät war, nebst mehreren anderen Vorschlägen, den ganzen Thierkreis unter die 24 Mitglieder derselben zu vertheilen. Jedes sollte eine, durch Verloofung ihm zugefallene Zone von 15° in der Länge, und von 7 bis 8° nördlicher und südlicher Breite zur Inspection bekommen, und seiner besonders wachsamem Aufsicht empfohlen werden. Jedes Mitglied sollte eine ganz genaue Himmels-Karte bis zu dem kleinsten teleskopischen Stern seines Departements entwerfen, und durch wiederholte Revision am Himmel des unverrückten Zustandes seines Districtes, oder jedes wandernden fremden Gastes sich versichern. Durch eine

Auszug aus von Zachs "Monatliche Correspondenz" Juni 1801 S. 801

Zuerst aber folgte eine weitere Zufallsentdeckung. Der italienische Astronom Giuseppe Piazzi (1746-1826) war ein begnadeter und gefeierter experimenteller Astronom. Er verfügte in seiner Sternwarte in Palermo auf Sizilien über die besten damals erhältlichen Instrumente, um die Position von Sternen zu bestimmen. Er veröffentlichte 1803, nach 14 Jahren Arbeit, einen Katalog von 6748 Sternpositionen, die eine noch nie dagewesene Präzision aufwiesen.

Die Bestimmung von Sternpositionen wurde damals hauptsächlich mit Instrumenten durchgeführt, die in der Sternwarte sorgfältig positioniert und ausgerichtet wurden. Danach durften sie nicht mehr bewegt werden. So reduzierte sich die Bestimmung einer Sternposition (entlang einer Koordinate) auf die Bestimmung eines Zeitpunktes,

in dem der Stern einen Metallfaden im Teleskop überquerte. Dadurch bestand in jeder Nacht nur eine einzige Chance, die Position eines Sterns zu bestimmen.

Piazzi hatte die Angewohnheit, seine Messungen in mehreren Nächten zu wiederholen, was die Präzision seiner Positionen zusätzlich erhöhte. Am 1. Januar 1801 plante er die Beobachtung eines Sterns, der heute als " μ Cephei" bezeichnet wird. Er fand aber unerwartet ein Objekt, das dem Zielstern etwa eine Minute vorausging. Er beschloss, dass genügend Zeit vorhanden war, um beide Objekte auszumessen. In der nächsten Nacht wiederholte er die Messungen. Die Position des unerwarteten Objekts hatte sich offensichtlich verändert. Zuerst zweifelte Piazzi an seinen Messungen. Die Abweichungen waren aber so gross, dass ein Fehler sehr unwahrscheinlich war. Die Messungen am 3. Januar zeigten endgültig, dass er ein sich bewegendes Objekt gefunden hatte. Auch am 4. Januar konnte Piazzi eine Position messen.

Danach folgten einige Nächte mit bedecktem Himmel. Erst am 10. Januar bestand wieder die Möglichkeit einer Messung. Inzwischen hatte sich der Himmelskörper aber so weit bewegt, dass Piazzi nicht schlüssig war, welcher von vier etwa gleich hellen Objekten der Neuling war. So vermass er alle Kandidaten. Erst am 12. Januar konnte er erkennen, welches Objekt sich bewegte. In der Folge konnte Piazzi noch mehrere Positionen bis am 11. Februar bestimmen. Danach wurde er ernsthaft krank und konnte nicht weiter beobachten. Er hatte in insgesamt 24 Nächten eine Position bestimmt. Von diesen Daten waren 19 von bester Qualität, die anderen wiesen mehr oder minder grosse Mängel auf, die durch die Witterung bedingt waren. Nicht nur Piazzi's Krankheit verhinderte weitere Messungen. Der Himmelskörper geriet zunehmend in die scheinbare Nähe der Sonne. Dadurch wäre er nur tagsüber zu beobachten gewesen. Mit den damaligen Instrumenten war das aber unmöglich. Die kurze Zeitspanne von Beobachtungen würde die Bestimmung einer zuverlässigen Bahn sehr erschweren. Um das Objekt wiederzufinden, musste weit in die Zukunft extrapoliert werden.

Piazzi war ein hervorragender Experimentator, von der Theorie verstand er hingegen eher wenig. Er hatte aber die Eitelkeit, der Erste zu sein, der eine Bahn des neuen Himmelskörpers berechnet hatte. So informierte er seine Kollegen nicht rechtzeitig über seine Entdeckung. Was nun folgte, war ein Trauerspiel.

Am 24. Januar 1801 schrieb er einen Brief an seinen Freund und Astronomen Barnaba Oriani (1752-1832) sowie an Bode, der damals Direktor der Berliner Sternwarte war. Er gab beiden die gleiche Information, nämlich zwei Positionen vom 1. und 23. Januar. Er erwähnte aber nicht, zu welchem genauen Zeitpunkt er die Messungen gemacht hatte. Die Angaben waren nur auf eine Bogenminute genau, zudem war die erste Position falsch und zwar um ein halbes Grad, eine riesige Abweichung. Er erwähnte noch, dass die Bewegung des Himmelskörpers am 11. Januar von retrograd zu rechtläufig gewechselt hatte. Diese Angaben waren nicht genügend, um eine erste Ellipsenbahn zu berechnen. Dazu braucht man drei Beobachtungen mit den genauen Zeitpunkten. Immerhin kannte er bereits den Namen des neuen Objekts: "Ceres Ferdinandea", benannt nach Ceres, der Schutzgöttin von Sizilien, und dem sizilianischen König Ferdinand von Bourbon, der die Sternwarte in Palermo gegründet hatte. Aus politischen Gründen wurde der Zusatz "Ferdinandea" später weggelassen.

Es musste sich beim Himmelskörper um einen Kometen handeln. Andere Objekte wurden damals nicht entdeckt, wenn man einmal vom Einzelfall Uranus absieht. Es war aber keinerlei Nebel um das Objekt zu sehen, wie es für einen Kometen typisch ist. Piazzi vermutete daher richtig, dass es sich um einen neuen Planeten handelte. Er war Mitglied der Himmels-Polizey, hatte aber nie eine offizielle Einladung bekommen. Daher wusste er nichts von diesem Gremium.

Die Post war im frühen 19. Jahrhundert nicht immer sehr schnell. Bode bekam Piazzis Brief am 20. März, Oriani am 5. April. Joseph Jérôme Lefrançois Lalande (1732-1807), ein bekannter französischer Astronom, hatte in Paris aus der Presse erfahren, dass in Palermo ein Komet entdeckt worden war. Es schrieb am 27. Februar einen Brief an Piazzi und bat um die Beobachtungsdaten. Piazzi war nicht nur ein Freund von Lalande, sondern auch sein Schüler. Er konnte das Anliegen nicht abschlagen. Er liess sich aber viel Zeit und schickte erst am 11. April die Beobachtungsreihe an Lalande und Oriani, nicht aber an Bode. Zudem machte er die Auflage, die Messungen nicht weiterzugeben. Bode hatte sofort vermutet, "sein" vermisster Planet sei endlich entdeckt worden. Er berechnete mit den unzulänglichen Angaben unter Annahme der von ihm vorhergesagten grossen Halbachse eine grobe Kreisbahn, für die zwei Beobachtungen genügen. Er fand die Bahn konsistent mit den Beobachtungen und informierte die Preussische Akademie der Wissenschaften. Zudem schrieb er an von Zach. Dieser war auch Herausgeber der "Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde", einer Zeitschrift für die schnelle Verbreitung astronomischer Neuigkeiten.

von Zach erbat daraufhin von Lalande die Beobachtungsreihe. In Paris schien man aber vom Planeten nichts zu wissen. von Zach schreibt in der Juli-Ausgabe seiner Monatlichen Correspondenz:

Allein mit nicht geringem Befremden erhielt ich zu Anfang Junius mehrere Briefe aus Paris, von dem Senateur La Place vom 29 May, von La Lande und Burckhardt vom 26 May, von De Lambre v. 24 May, von Méchain vom 26 May, von Henry vom 28 May; und keiner von allen diesen sechs Astronomen, die uns mehrere wichtige Beobachtungen und neue Entdeckungen mitgetheilt haben, erwähnen des neuen Planeten auch nur mit einer Sylbe! Der

Johann Carl Burckhardt (1773-1825) hatte jedoch in Paris die Daten von Lalande bekommen. Er berechnete daraus zuerst eine Parabelbahn in der Annahme, dass es sich um einen Kometen handelte. Es gelang ihm hingegen nicht wirklich, die Beobachtungen mit der Annahme einer Parabelbahn zu beschreiben. Danach berechnete er eine Kreisbahn, später noch eine Ellipsenbahn. Er beklagte sich, dass Piazzi die Beobachtungen nicht früher herausgegeben hatte. Alle Bahnelemente veröffentlichte von Zach in der Juli-Ausgabe der Correspondenz von 1801. Er gibt

sogar vorausberechnete Sternörter, um die Wiederauffindung des Planeten zu erleichtern.

Andere Astronomen hatten ebenfalls eine Bahn berechnet, so etwa Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (1758-1840). Er war zwar praktizierender Arzt, widmete aber seine Freizeit der astronomischen Beobachtung. Er hatte nur die beiden von Piazzi ursprünglich gegebenen Positionen. Entsprechend konnte auch er nur eine grobe Kreisbahn berechnen. Es war bald absehbar, dass die Wiederauffindung ein Problem sein könnte. So beklagt sich von Zach im August-Heft der Correspondenz (S.163):

Freylich ist es ewig Schade, und alle Astronomen ohne Ausnahme beklagen es, dass Piazzi diesen Fremdling nicht länger als bis zum 11 Feb. beobachtet habe. Wäre er nicht krank geworden, oder hätte es ihm gefallen, von seiner Entdeckung früher Nachricht zu geben, so würden andere Astronomen dieses Gestirn noch im Feb., März und April verfolgt haben, und wenn uns auch diese fortgesetzten Beobachtungen noch keinen gänzlichen Aufschluss über die Natur dieses Weltkörpers gegeben hätten, so würden sie uns doch so weit belehrt haben, dass wir ihn mit mehr Gewissheit wieder hätten auffinden können; dagegen jetzt mehrere Astronomen nicht ohne Grund befürchten, dass es Noth haben dürfte, diesen Fremdling so leicht wieder auszuspähen. Prof.

Piazzi gibt schliesslich sein Einverständnis, die ganze Beobachtungsreihe in der Monatlichen Correspondenz zu veröffentlichen. Dies geschieht in der September-Ausgabe 1801, S. 280. Niemandem war es in der Zwischenzeit gelungen, den verlorenen Planeten wiederzufinden. Es sollte auch noch bis zum 7. Dezember 1801 dauern, bis von Zach vermutete, die Ceres wiederentdeckt zu haben. Das bestätigte sich am 1. Januar 1802, als er eine weitere Beobachtung anstellen konnte. Nur einen Tag danach fand auch Olbers unabhängig davon den Planeten wieder. Dies wäre nicht möglich gewesen, wenn sich nicht Carl Friedrich Gauss des Problems angenommen hätte.

Es ist nicht ganz klar, in welcher Reihenfolge Gauss gearbeitet hat. Er liess sich nie in die Karten sehen, sondern veröffentlichte seine Resultate erst, wenn er sie für perfekt hielt. Er hat aber zweierlei getan. Er entwickelte eine Methode zur Bestimmung einer ersten Bahn aus drei Beobachtungen, die nicht an irgendwelche Restriktionen

gebunden war, wie das die bisher bekannten waren. Vorher hat er aus einer ersten groben Bahn durch Variation der Bahnelemente sukzessive verbesserte Bahnen berechnet. Dazu wandte er das Least-Squares-Verfahren an, das er einige Jahre vorher im Alter von 18 Jahren erfunden hatte. Er schickte in Abständen von Wochen immer neue, verbesserte Bahnelemente an von Zach, der sie in seiner Correspondenz veröffentlichte.

Es war schliesslich offensichtlich, dass ohne die Berechnungen von Gauss die Ceres nicht mehr so schnell aufgefunden worden wäre. von Zach ist voll des Lobes für Gauss und Olbers lässt sich in der Correspondenz zitieren:

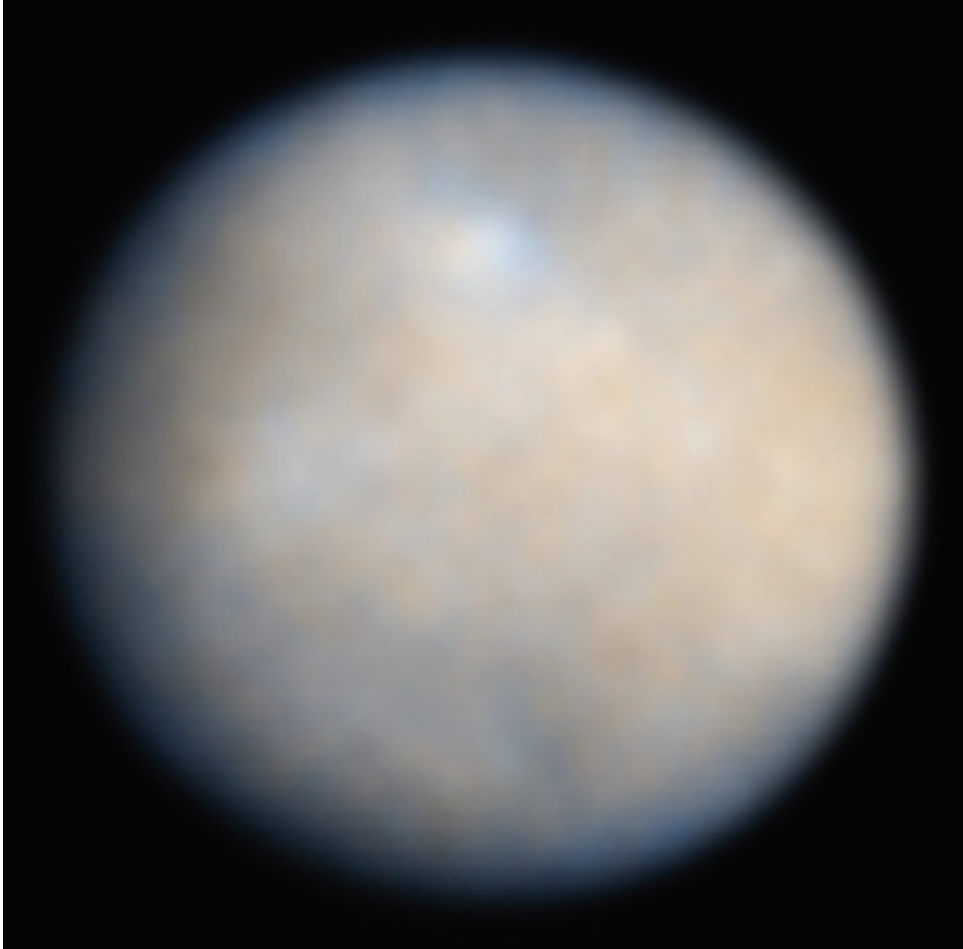
die scharfsinnigen Bemühungen und Berechnungen des Dr. Gauss hätten wir die Ceres vielleicht nicht wieder gefunden, der grössere und schönere Theil des Verdienstes gebührt daher ihm. Derselben Meinung ist auch der würdige Dr. Olbers; er schreibt an den Herausgeber; „Mit Vergnügen werden Sie bemerkt haben, wie genau Dr. Gauss's Ellipse mit den Beobachtungen der Ceres stimmt. Melden Sie doch dies diesem würdigen Gelehrten, unter Bezeugung meiner ganz besondern Hochachtung. Ohne seine mühsamen Untersuchungen über die elliptischen Elemente dieses Planeten würden wir diesen vielleicht gar nicht wieder gefunden haben. Ich wenigstens hätte ihn nicht so weit ostwärts gesucht“.

Auszug aus der Monatlichen Correspondenz, Februar 1802, S. 161

Es gibt keinen einzelnen Planeten in der Lücke der Titius-Bode-Reihe. Es gibt dort eine ganze Population von zahllosen kleinen planetenartigen Himmelskörpern jeglicher Grösse. Ceres ist mit einem Durchmesser von ca. 950 km der grösste und umfasst einen Drittel der Masse aller Objekte in diesem Bereich des Sonnensystems. Ceres galt nach ihrer Entdeckung 50 Jahre lang als Planet. Erst als immer mehr Planetoiden entdeckt wurden, betrachtete man sie als Mitglied einer Population. Seit einem Beschluss der Internationalen Astronomischen Union IAU gilt Ceres als Zwergplanet, gleichgesetzt mit den Kuiper-Gürtel Zwergplaneten Pluto, Eris, Haumea und Makemake.

Ceres ist zu keinem Zeitpunkt hell genug, um mit bloßem Auge beobachtet werden zu können. Zur Zeit der Opposition genügt aber ein lichtstarker Feldstecher.

Über die Beschaffenheit des Körpers ist noch wenig bekannt. Das beste Bild stammt vom Hubble-Weltraumteleskop:



Ceres,. Quelle: NASA, Hubble space telescope

Das wird sich bald ändern. Die NASA-Raumsonde *Dawn* wird Anfang 2015 in eine Umlaufbahn um Ceres einschwenken und den Körper umfassend untersuchen.

Die Himmels-Polizey

Johann Elert **Bode** (Berlin)

Thomas **Bugge** (Kopenhagen)

Johann Carl **Burckhardt** (Paris)

Johann Tobias **Bürg** (Wien)

Ferdinand Adolf **von Ende** (Celle)

Johann **Gildemeister** (Bremen)

Karl Ludwig **Harding** (Lilienthal)

Wilhelm **Herschel** (Slough)

Johann Sigismund Gottfried **Huth** (Frankfurt an der Oder)

Georg Simon **Klügel** (Halle)

Julius August **Koch** (Danzig)

Nevil **Maskelyne** (Greenwich)

Pierre François André **Méchain** (Paris)

Daniel **Melanderhielm** (Stockholm)

Charles **Messier** (Paris)

Wilhelm **Olbers** (Bremen),

Barnaba **Oriani** (Milan)

Giuseppe **Piazz**i (Palermo)

Johann Hieronimus **Schroeter** (Lilienthal)

Friedrich Theodor **Schubert** (St. Petersburg)

Jöns **Svanberg** (Uppsala)

Charles **Thulis** (Marseille)

Johann Friedrich **Wurm** (Blaubeuren)

Franz Xaver **von Zach** (Gotha)

Bahnelemente

1. grosse Halbachse a
2. Exzentrizität e
3. Bahnneigung i
4. Länge des Knotens Ω
5. Argument des Perihels ω
6. Periheldurchgangszeit t_0

