Einführung in die Statistik

INHALTSVERZEICHNIS

		Seite
1.	Zählung von radioaktiven Zerfällen und Statistik	2
2.	Mittelwert und Varianz	2
3.	Momente einer Verteilung	3
4.	Poisson-Verteilung	4
5.	Varianz der Poisson-Verteilung	5
6.	Statistischer Fehler bei der Bestimmung von Zerfallsraten	6

1. Zählung von radioaktiven Zerfällen und Statistik

Es gibt keine exakten Messresultate. Dies gilt auch für Zählexperimente, obwohl das Resultat eine ganze Zahl ist. Durch die Zufälligkeit des radioaktiven Einzelereignisses sind aber Aussagen über die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Zerfallsereignissen möglich. Von einem einzelnen Atom kann man nicht vorhersagen, wann es zerfällt. Man kann nur die Wahrscheinlichkeit angeben, daß es innerhalb einer bestimmten Zeitspanne zerfällt. Der Zerfall eines Kerns zu einem bestimmten Zeitpunkt ist das experimentelle Einzelereignis, das bei der Messung der Radioaktivität im allgemeinen festgestellt wird. Die große Zahl von Einzelereignissen, die normalerweise zur Verfügung steht, macht eine statistische Behandlung notwendig. Konkret kann man bei der Messung der Aktivität eine Zeitspanne vorgeben und die Anzahl Zerfälle innerhalb dieser Spanne betimmen. Die Anzahl Zerfälle ist eine Zufallsvariable. Man charakterisiert sie in der Statistik durch ihre Verteilungsfunktion. Sie enthält die ganze Information über den physikalischen Vorgang. Die Verteilungsfunktion näherungsweise zu bestimmen, ist daher das Ziel der statistischen Auswertung. Man kann eine Verteilung durch einige Maßzahlen charakterisieren, die wichtigsten davon sind Mittelwert μ und Varianz σ^2.

2. Mittelwert und Varianz

Der Mittelwert einer diskreten Verteilung ist definiert durch

$$\mu = \sum_i x_i \cdot f(x_i) \tag{1}$$

Die Begriffe "Mittelwert einer Verteilung" und "Mittelwert einer einer Zufallsvariablen" werden oft nicht unterschieden. Hier soll nicht auf den Unterschied eingegangen werden, da dies zu weit führen würde.

Die Varianz einer diskreten Verteilung ist definiert durch

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) \tag{2}$$

Die Varianz ist ein Maß für die Streuung der Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann. Die Quadratwurzel der Varianz heißt Standardabweichung.

3. Momente einer Verteilung

Mittelwert und Varianz sind Sonderfälle der sogenannten Momente einer Verteilung. Eine beliebige Funktion g(X) der Zufallsvariablen X ist selbst eine Zufallsariable. Der Erwartungswert von g(X) ist definiert durch

$$E(g(x)) = \sum_i g(x_i) \cdot f(x_i) \tag{3}$$

wobei die x_i Ausprägungen von X sind, also experimentelle Einzelereignisse. f(x) ist die zu X gehörige Verteilungsfunktion.

Wählt man in Gl. (3) speziell $g(X) = X^k$ (k = 1, 2, ...), so ergibt sich

$$E(X^k) = \sum_i x_i^{\,k} \cdot f(x_i) \tag{4}$$

Diese Größe heißt das *k-te Moment* der betreffenden Verteilung. Für k = 1 geht (4) in (1) über. Das 1. Moment der Verteilung ist also der Mittelwert μ:

$$\mu = E(X) \tag{5}$$

Wählt man in Gl. (3) speziell $g(X) = [X–\mu]^k$ (k = 1, 2, ...), so ergibt sich

$$E([X-\mu]^k) = \sum_i (x_i - \mu)^k \cdot f(x_i) \tag{6}$$

Diese Größe heißt das k-te zentrale Moment der betreffenden Verteilung. Existiert das 1. zentrale Moment, so hat es den Wert null. Für k=2 geht (6) in (2) über. Das 2. zentrale Moment ist demnach die Varianz der betreffenden Verteilung:

$$\sigma^2 = E([X-\mu]^2) \tag{7}$$

Die zentralen Momente lassen sich aber auch durch die Momente ausdrücken:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \tag{8}$$

Bei manchen Verteilungen berechnet man die Momente am einfachsten direkt aus den Definitionsgleichungen, während man in anderen Fällen durch die Benutzung einer geeigneten Hilfsfunktionleichter zum Ziel kommt. Der Erwartungswert $E(e^{tX})$

heißt die momenterzeugende Funktion der betreffenden Verteilung und wird mit G(t) bezeichnet:

$$G(t) \;=\; E(e^{tX}) \;=\; \sum_i (e^{tX} \cdot f(x_i)) \tag{9}$$

4. Poisson-Verteilung

Betrachtet man ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreffen eines Ereignisses A bei jeder Wiederholung die gleiche ist und sich die Ergebnisse der verschiedenen Ausführungen gegenseitig nicht beeinflussen, erhält man eine Binomialverteilung. Sie hat die Verteilungsfunktion

$$f(x) \;=\; \frac{n!}{x! \cdot (n-x)} p^x \cdot (1-p)^{n-x} \tag{10}$$

Bei vielen Anwendungen ist die Erfolgswahrscheinlichkeit p beim einzelnen Experiment klein, während die Anzahl n der Ausführungen sehr groß ist. In einem solchen Fall ist es vorteilhaft, die Binomialverteilung mit ihren für große n recht unbequemen Binomialkoeffizienten durch die Verteilung zu approximieren, die sich ergibt, wenn p gegen Null und n gegen Unendlich strebt. Der Mittelwert

$$\mu \;=\; n\,p \tag{11}$$

strebt dabei gegen einen endlichen Wert. Um die genannte Verteilung zu gewinnen, geht man von der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung Gl. (10) aus. Wegen Gl. (11) ist

$$p \;=\; \frac{\mu}{n} \;, \quad \text{also} \quad p^x \;=\; \frac{\mu^x}{n^x} \tag{12}$$

und weiterhin

$$(1-p)^{n-x} \;=\; \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x} \;=\; \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n} \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x} \tag{13}$$

Setzt man dies in Gl. (10) ein, so ergibt sich die Verteilungsfunktion:

$$f(x) \;=\; \frac{\mu^x}{x!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^x} \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x} \tag{14}$$

Für $n \to \infty$ streben

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^x} \;\to\; 1$$

$$\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n \;\to\; e^{-\mu}$$

$$\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x} \;\to\; 1$$

Also ergibt sich die kontinuierliche Verteilungsfunktion :

$$f(x) \;=\; \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \tag{15}$$

Die Verteilung heißt Poisson-Verteilung. Wie aus der Herleitung folgt, hat sie den Mittelwert μ.

5. Varianz der Poisson-Verteilung

Gemäß Gln. (9) und (15) hat die Poisson-Verteilung die momenterzeugende Funktion

$$G(x) \;=\; e^{-\mu} \cdot e^{\mu e^t} \tag{16}$$

Also ist G(0) = 1. Wiederholte Differentiation ergibt nacheinander:

$$G'(t) \;=\; e^{-\mu} \cdot e^{\mu e^t} \cdot \mu e^t \;=\; \mu e^t \cdot G(t)$$
$$G''(t) \;=\; \mu e^t [G(t) + G'(t)]$$

Also ist $G'(0) = \mu$ und weiterhin

$$E(x^2) \;=\; G''(0) \;=\; \mu + \mu^2 \tag{17}$$

Demnach hat die Poisson-Verteilung die Varianz $\sigma^2 = \mu$. Aus diesem Ergebnis erkennt man unmittelbar, dass dimensionsbehaftete Größen nicht poissonverteilt sein können. Mittelwert und Varianz hätten dann nicht die gleiche Einheit und können demnach auch nicht gleich sein.

Die Anzahl Zerfälle während einer vorgegebenen Zeitspanne ist poissonverteilt, nicht die Zählrate.

6. Statistischer Fehler bei der Bestimmung von Zerfallsraten

Es läßt sich zeigen, daß sich die asymmetrische Poissonverteilung durch eine Gaussverteilung approximieren läßt, wenn die Anzahl der Ausführungen n, in diesem Fall die Anzahl der total gezählten Zerfälle, gegen unendlich strebt. Man kann dann die Fehlerrechnung mit der wohlbekannten Normalverteilung durchführen. Die wahre Zerfallsrate liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % innerhalb einer Standardabweichung σ um die gemessene Zerfallsrate. Bei radiochemischen Messungen ist es üblich, einen Vertrauensbereich von 2σ um den gemessenen Mittelwert anzugeben. Wenn die Annahme einer Normalverteilung zuläßig ist, entspricht das einer statistischen Sicherheit von 95,5 %.

Bei einer radiochemischen Messung interressiert man sich oft für die Zähldauer bei einem Experiment für eine vorgegebene Präzision, wenn die Zählrate ungefähr bekannt ist. Für die meist geforderte Breite von 2 Standardabweichungen kann man sie mit folgender Beziehung abschätzen:

$$t = \frac{1}{I} \cdot \left(\frac{2}{\sigma_{rel}}\right)^2 \quad \text{mit} \quad \sigma_{rel} = \frac{2\sigma}{\mu} \tag{19}$$

wobei I die Impulsrate ist und σ_{rel} der geforderte Wert für die relative Fehlerbreite. Da in der analytischen Chemie kaum Präzisionen kleiner als 1 % erreicht werden, genügt es im allgemeinen, einen Wert von σ_{rel} =0,01 zu fordern, um den Zählfehler als Fehlerquelle auszuschalten.

Einige Messgeräte wählen die Zähldauer selbst. Sie akkumulieren die Anzahl Zerfälle, die für eine vorgegebene Präzision notwendig ist.